Fyzikální praktikum FJFI ČVUT v Praze

Cavendishův experiment

Číslo úlohy:	1
Jméno:	**Vojtěch HORNÝ**
Spolupracoval:	Jaroslav Zeman
Datum měření:	19. 11. 2009
Číslo kroužku:	pondělí 13:30
Číslo skupiny:	6
Klasifikace:	

Zadání

1. V přípravě odvoďte vztah pro maximální odhad relativní chyby G. Potřebné informace najdete v materiálu [4] na straně 1 až 4. Chyby měření u veličin r, b, d, m_2 - viz vztah (5) považujte za nulové.
2. Ve spolupráci s asistentem zkontrolujte, zda je torzní kyvadlo v rovnováze, tj. horizontálně i rotačně vyrovnané.
3. Dynamickou metodou změřte časový průběh torzních kmitů v jedné poloze, potom umístěte velké koule m_1 do polohy II a změřte časový průběh v této druhé poloze. U každého měření si poznamenejte i chybu tohoto měření, kterou odhadnete (čím rychleji se světelná značka pohybuje, tím větší bude chyba určení její polohy).
4. Naměřenou závislost nafitujte funkcí (3) ve vhodném programu Gnuplot a vykreslete graf naměřených dat včetně odchylek a nafitované funkce.
5. Z výsledků fitu a naměřených hodnot spočtěte gravitační konstantu G i výslednou chybu měření, kterou spočtete z Vámi odvozeného vztahu z prvního úkolu. Většina fitovacích programů uvádí parametry funkce i s jejich chybou – tuto chybu potom považujte za chybu měření a dosazujte ji do odvozeného vztahu.
6. Váš výsledek měření gravitační konstanty G srovnejte s tabulkovou hodnotou G a ověřte, jestli se tabulková hodnota vejde do intervalu naměřená hodnota - chyba měření. Pokud ne, uveďte systematické chyby, kterých jste se dopustili.

Základní pojmy a vztahy

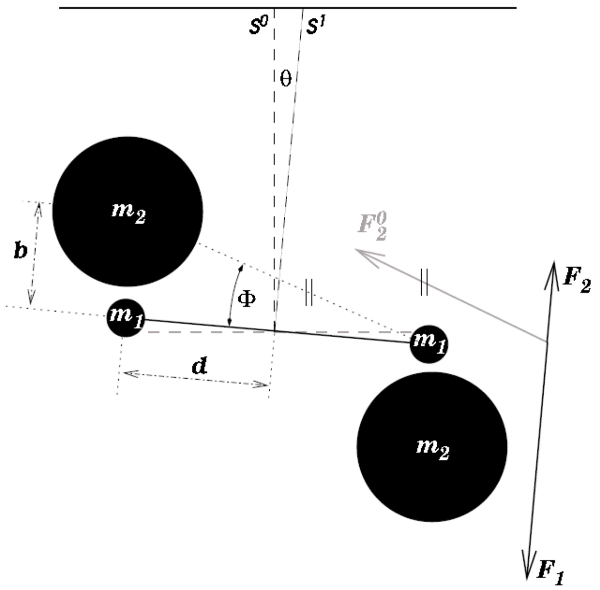
Roku 1687 zformuloval Isaac Newton ve svém díle Principia známý gravitační zákon:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (1)$$

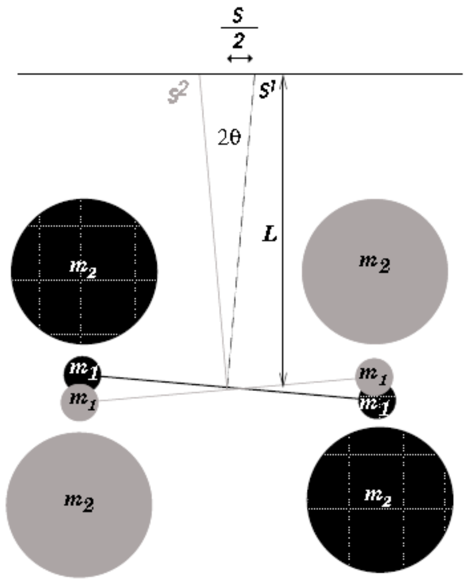
kde m_1, m_2 představují hmotnosti hmotných bodů a r je jejich vzájemná vzdálenost. Tato síla vždy jen přitahuje jeden hmotný bod k druhému. Konstanta úměrnosti G se nazývá gravitační konstanta. Přímým způsobem se nedá G příliš přesně určit.

Henry Cavendish roku 1798 určil při experimentech s torzními kyvadly gravitační konstantu bez znalosti hmotnosti Země. Jeho experiment jsme v této úloze zopakovali.

K torzi velmi tenkého a dlouhého vlákna stačí i velice malá síla. K vyjádření míry zkroucení lanka stačí měřit úhel, o který se stočí jeden konec lanka oproti druhému. Při popisu rotačního pohybu je rozumné převést působící sílu na moment dvojice sil. Na obrázku 1 je schéma použité experimentální sestavy. K torznímu lanku je připevněna činka ze dvou menších koulí o hmotnostech m_1 a zrcátko, od kterého se odráží laserový paprsek. Přiložíme-li k malým koulím koule velké o hmotnostech m_2, vznikne v čince moment dvojice sil o velikosti $2d(F_1 - F_2)$. V rovnováze je tento moment vyrovnáván torzním momentem o velikosti $k\theta$. Po dosazení ze vztahu (1) a několika geometrických úpravách dospějeme k rovnosti $\frac{2dGm_1m_2}{b^2}(1-\beta) = k\theta, \beta = \frac{b^3}{(b^2+4d^2)^{3/2}}$.



Obr. 1 – Schéma torzního kyvadla



Obr. 2 – Dynamická metoda měření rovnovážných poloh, černá a šedá barva zachycují různé konfigurace koulí

Úhel θ můžeme podle obrázku 2 vypočítat přibližně jako

$$\tan 2\theta \approx 2\theta = \frac{|S^2 - S^1|}{2L} \tag{2}$$

Torzní konstantu k vypočítáme z periody kyvu T a momentu setrvačnosti činky I.

$$k = \frac{4\pi^2 I}{T^2} \tag{3}$$

Moment setrvačnosti dvou koulí o hmotnostech $m1$ a poloměru r vzdálených od sebe o $2d$ vzhledem k ose kolmé na spojnici obou koulí a procházející uprostřed mezi koulemi je

$$I = 2m_1\left(d^2 + \frac{2}{5}r^2\right) \tag{4}$$

Po dosazení získáváme finální vztah pro gravitační konstantu:

$$G = \frac{\pi^2 b^2 S}{T^2 m_2 L} \cdot \frac{d^2 + \frac{2}{5}r^2}{d(1-\beta)} \qquad \beta = \frac{b^3}{(b^2+4d^2)^{3/2}} \tag{5}$$

Pomůcky

Torzní kyvadlo, zemnící kabel, He-Ne laser, podstavec pod laser, stopky, 5m metr.

Postup měření

Relativní chybu měření G jsem určil podle vztahu:

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta S}{S} + 2\frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta L}{L} \tag{6}$$

K odvození jsem přitom využil učební materiál [4], vztah (III. 9).

Celé měření spočívalo v měření závislosti výchylky činky v čase. Z nasbíraných dat jsem poté určil hodnoty θ a k, resp. vzdálenost dvou rovnovážných poloh a střední hodnotu periody kmitů.
Kyvadlu byl dodán silový impuls tak, že k malým koulím byly přiblíženy na otočném držáku koule velké. Jakmile se pohyb ustálil, začali jsme zaznamenávat po dvaceti sekundách polohu odrazu laserového paprsku od zrcátka na zdi a také chybu určení této polohy. Nechali jsme proběhnout několik period a poté otočili do velké koule do druhé polohy a měření jsme opakovali. Naměřené soubory dat jsme v programu Gnuplot fitovali funkcí, která je reprezentuje závislost výchylky na čase při tlumeném harmonickém pohybu.

$$f(t) = Ae^{-\delta t} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right) + S, \tag{7}$$

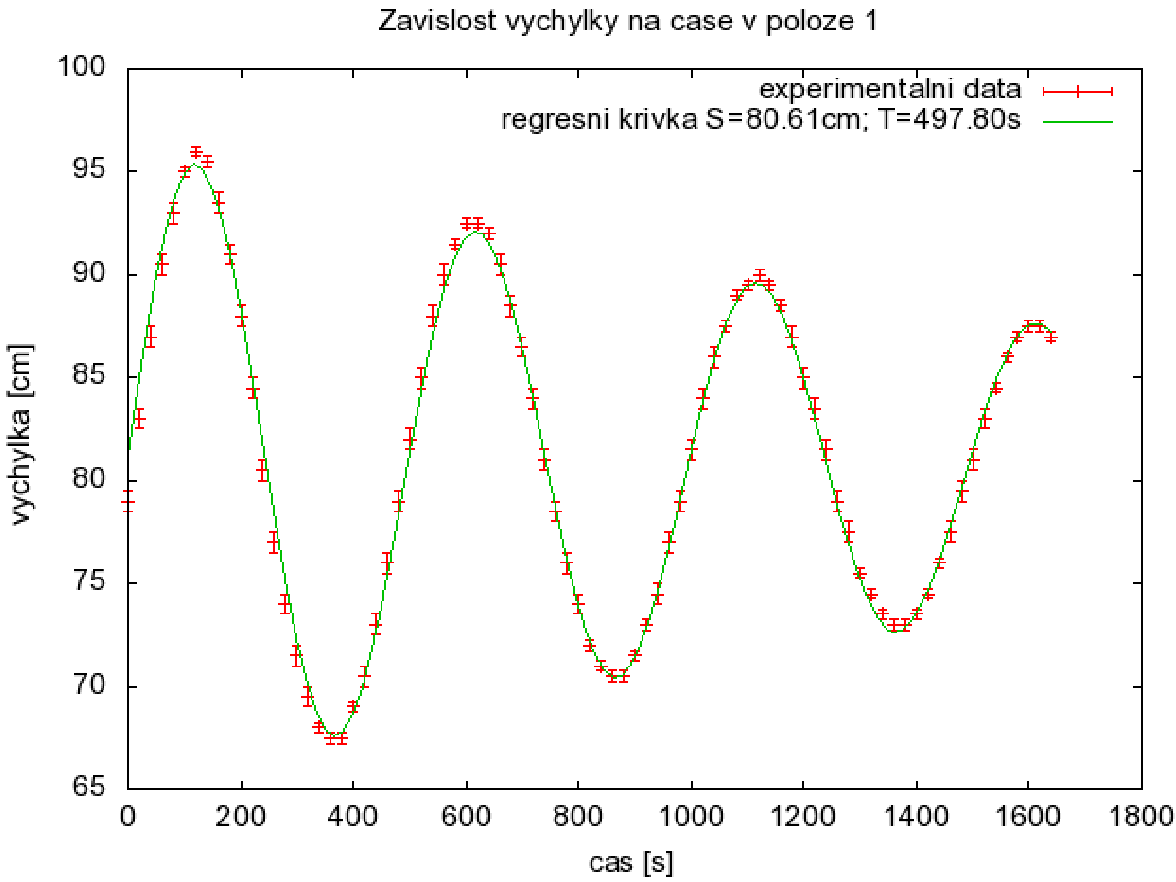
kde A představuje amplitudu výkyvu, δ součinitel útlumu, T perioda kmitů, φ_0 počáteční fáze a S je rovnovážná poloha.
Při měření jsme věnovali zvýšenou pozornost správné aretaci činky. Zkontrolovali jsme, že je kyvadlo horizontálně vyrovnané, abychom potlačili vliv gravitační síly mezi Zemí a malými koulemi. Také jsme ověřili, že je správně zapojen zemnící kabel, který z koulí svedl náboj z koulí na zem. Coulombovské sílové působení by mohlo nepříznivě ovlivnit výchylky kyvadla a tak posunout rovnovážnou polohu.

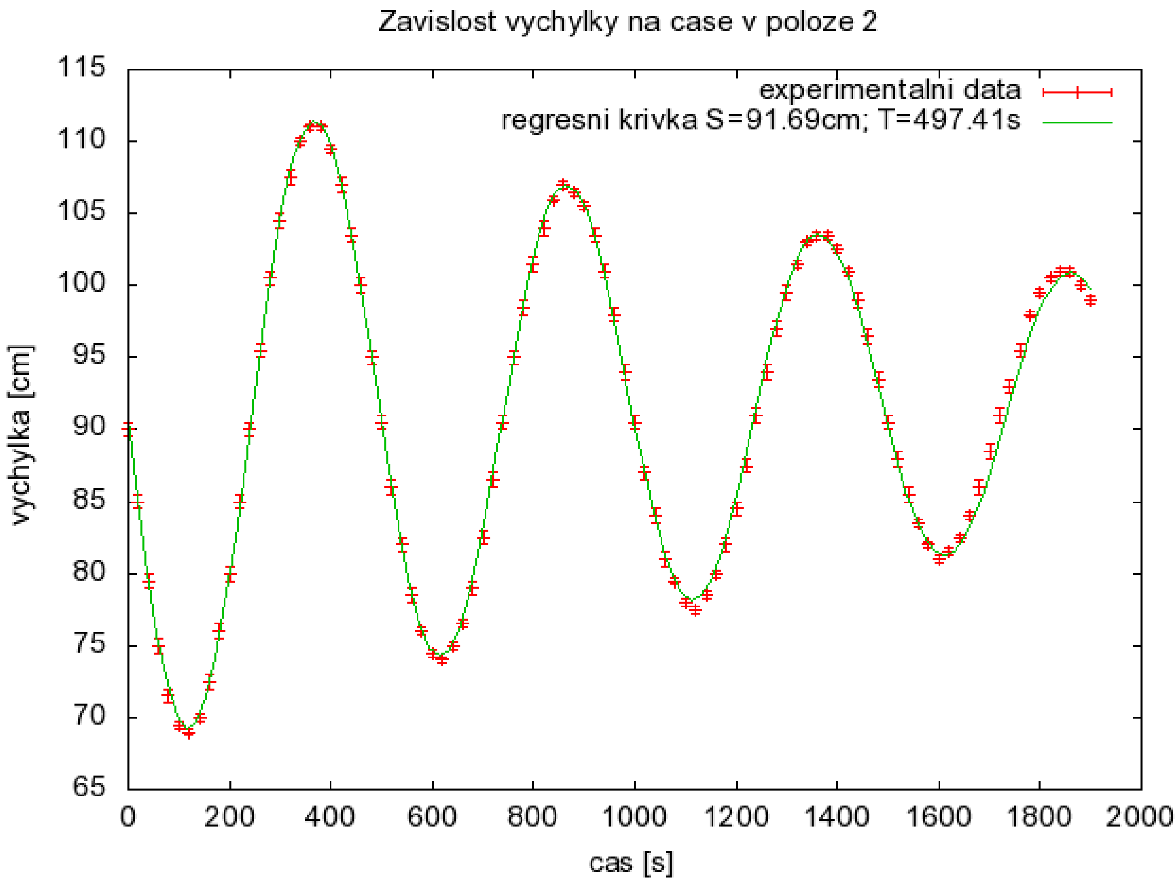
Experimentální data a výsledky měření

V grafech 1 a 2 jsou znázorněna naměřená data při obou konfiguracích koulí. Ukazují závislost výchylky polohy odrazu na zdi na čase a také nafitovanou funkci (7). V legendách jsou uvedeny hodnoty T a S pro jednotlivá měření.
U měření závislosti polohy tečky na zdi při druhé konfiguraci koulí jsme se setkali s rušivým vlivem. Jeho působení je vidět v grafu 3. Lanko patrně zpočátku naráželo do ochranných stěn, popř. do jiné zábrany. Po snížení amplitudy rušivý faktor vymizel. Vyloučil jsem tedy z datového souboru poškozená data a poté se povedlo správně nafitovat měřenou závislost, jak je patrno z grafu 2.
Pro úplnost uvádím přehled číselných hodnot všech potřebných veličin i chybami určení.

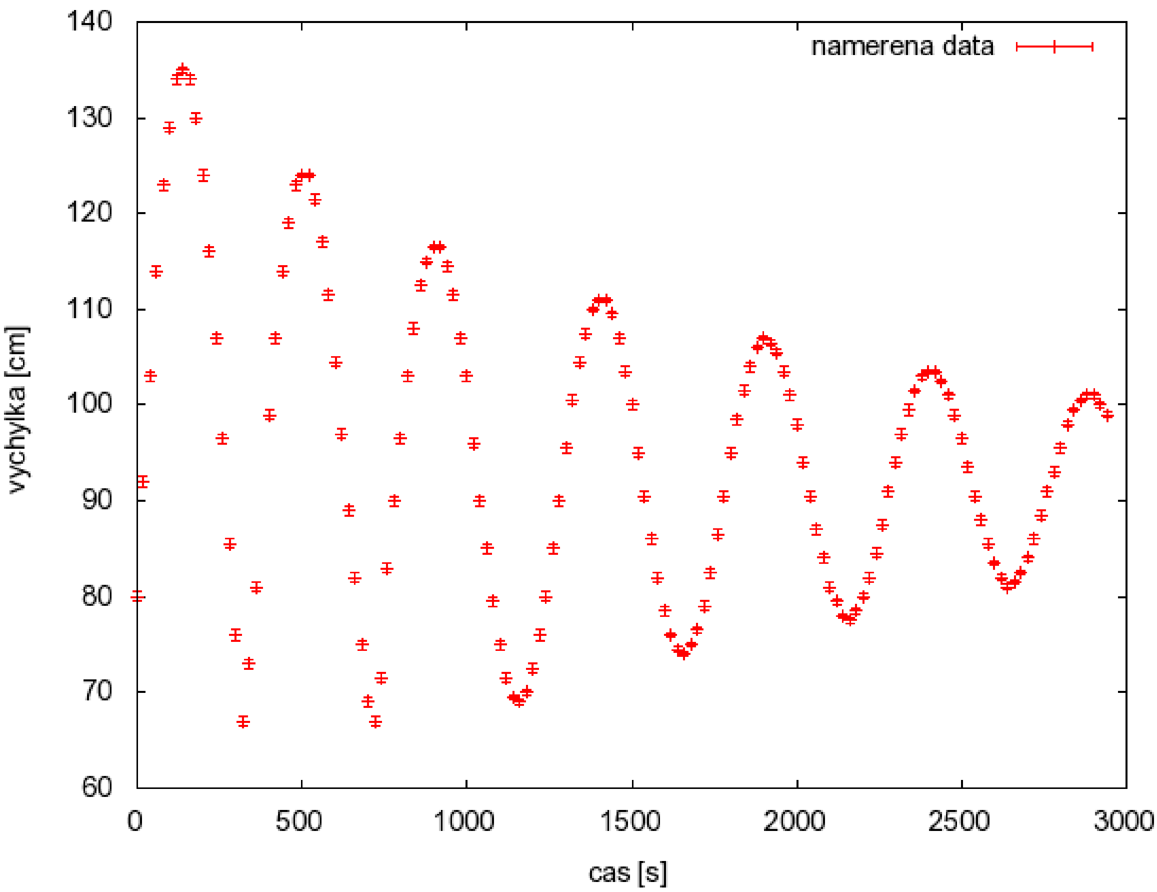
r = 9,55 mm
d = 50 mm
b = 46,5 mm
m_2 = 1,25 kg
L = (6,00 ± 0,01) m
S = (11,08 ± 0,12) cm
T = (497,6 ± 0,90) s

Po dosazení do vzorce (5) vychází hodnota gravitační konstanty na $G = (6{,}98 \pm 0{,}11) \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$.





Grafy 1, 2 – Závislosti výchylky na čase při obou konfiguracích i s chybou určení



Graf 3 – Naměřené hodnoty při druhé konfiguraci

Diskuse

Podle poslední adjustace [3] je hodnota gravitační konstanty $G_{[3]} = (6{,}67428 \pm 0{,}00067) \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$. Naše hodnota tedy mimo uvedený rozsah, liší se od hodnoty $G_{[3]}$ o 4,7%. Během měření jsme se tedy museli dopustit systematických chyb.

Je třeba mít na paměti, že činka s malými koulemi byla mj. v nehomogenním gravitačním poli okolních těles. Tato tělesa tedy také vychylovala činku, ale jejich vliv nebyl patrně tak velký, aby vysvětlil 4,7 procentní rozdíl oproti očekávané hodnotě.

Další nepřesnost mohla vzniknout chybným umístěním větších koulí při zahajování experimentu. Vzdálenost *b* mohla být rozdílná oproti hodnotě, se kterou jsme počítali.

Bylo by třeba několikrát opakovat měření, abych odhalil skutečné systematické chyby. Obzvláště by bylo vhodné opakovaně ověřit i rovnovážné polohy v obou konfiguracích a periodu kmitů, protože obě veličiny byly nafitovány s poměrně velkou odchylkou. Zvláště přesnější určení periody kmitů by výrazně snížilo relativní chybu měření *G*. Toto konkrétní měření mohlo být ovlivněno i nějakou náhodnou chybou.

Poznámka

Zkusil jsem z naměřené hodnoty gravitační konstanty určit hmotnost Země. Gravitační síla udává hmotnému bodu gravitační zrychlení a_g. Můžeme tedy psát:

$$G\frac{mM_z}{R_z^2} = ma_g$$

$$M_z = R_z^2 \frac{a_g}{G}$$

Poloměr Země je (6 378 135 ± 5) m, gravitační zrychlení pak (9,823 ± 0,001) $m \cdot s^{-1}$. Po dosazení vychází hmotnost Země na $(5{,}71 \pm 0{,}09) \cdot 10^{24}$ kg.

Závěr

Zopakovali jsme Cavendishův experiment a ověřili jsme, že je velice přesný. Naměřili jsme gravitační konstantu $G = (6{,}98 \pm 0{,}11) \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$. Oproti tabulkové hodnotě se liší o 4,7%. Měření bylo ovlivněno systematickou chybou. K jejímu odhalení bylo by nutné měření opakovat.

Použitá literatura

[1] **FJFI ČVUT**, *Cavendishův experiment* [online], [cit. 25. listopadu 2009], http://rumcajs.fjfi.cvut.cz/fyzport/FundKonst/Cavendish/cav.pdf

[2] **Feynmann, R.P., Leighton, R.B., Sands, M.**,*Feynmannovy přednášky z fyziky 1*, Havlíčkův Brod: Fragment, 2001

[3] **NIST**, *Fundamental Physical Constants* [online], [cit. 25. listopadu 2009], http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html

[4] **FJFI ČVUT**, *Chyby měření a zpracování naměřených výsledků* [online], [cit. 25. listopadu 2009], http://praktika.fjfi.cvut.cz/ProvPokyny/chybynav/CHYBY1n.pdf